// Изв. РАН. МЖГ. - 1995. - No 2. - С. 108–117.

9. Маклаков Д.В. *Нелинейные задачи гидродинамики потенциальных течений со свободными границами.* - М.: Янус-К, 1997. - 281 с.

10. Maklakov D.V. *A note on the optimum profile of a sprayless planing surface* // J. Fluid Mech. - 1999. - V. 384. - P. 281–292.

11. Schwartz L.W. *Computer extension and analytic continuation of the Stokes expansion for gravity waves* // J. Fluid Mech. - 1974. - V. 62.- P. 553–578.

12. Tanaka M. *The stability of solitary waves* // Phys. Fluids. - 1986. - V. 29. - P. 650–655.

13. Tanaka M. *On the "crest instabilities" of steep gravity waves* // Workshop on Mathematical Problems in the Theory of Nonlinear Water Waves / CIRM, Luminy, France, May 1995 (Abstract only).

14. Woods L.C. *Compressible subsonic flow in two-dimensional channels with mixed boundary conditions* // Quart. J. Mech. and Appl. Math. - 1954. - V. 7. - No 3.

РЕШЕНИЕ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ D И A ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В СЛУЧАЕ ПЛОСКИХ ОБЛАСТЕЙ ПРИВЕДЕНИЕМ К ОДНОИМЕННЫМ ЗАДАЧАМ ДЛЯ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

Л. И. Чибрикова

Казанский государственный университет

Рассматривается вещественное эллиптическое дифференциальное уравнение 2-го порядка

$$E(u) \equiv \Delta + a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x,y)u = 0 \qquad (1)$$

с $\mathbf{R}$-аналитическими коэффициентами a, b, c в заданной плоской области $T \subset \mathbf{C}$. Речь идет о возможности конструктивного построения регулярных решений граничной задачи Дирихле (задачи D) и ее обобщения с производными в краевом условии (задачи A). Основой для этой работы послужила монография И. Н. Векуа

([1], гл. I и III). Изложенные в ней общие представления регулярных в T решений уравнения (1) с $\mathbf{R}$-аналитическими коэффициентами и различных его обобщений через голоморфные в T функции одного комплексного переменного до сих пор считаются наиболее удобными при решении граничных задач, в том числе задач D и A.

Метод И. Н. Векуа состоит в продолжении уравнения (1) на комплексные переменные

$$z = x + iy, \qquad \zeta = x - iy \tag{2}$$

($\zeta = \bar{z}$ при x и y вещественных; при $\zeta \neq \bar{z}$ x и y могут быть только комплексными). При использовании операторов комплексного дифференцирования

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial \zeta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) \tag{3}$$

продолжением уравнения (1) на комплексные переменные z, ζ будет операторное уравнение

$$F(U) \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \zeta} + A(z,\zeta)\frac{\partial U}{\partial z} + B(z,\zeta)\frac{\partial U}{\partial \zeta} + C(z,\zeta)U(z,\zeta) = 0, \tag{4}$$

в котором

$$U(z,\zeta) = u\left(\frac{z+\zeta}{2}, \frac{z-\zeta}{2i}\right), \tag{5}$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} A(z,\zeta) & = & \dfrac{1}{4}\left[a\left(\dfrac{z+\zeta}{2}, \dfrac{z-\zeta}{2i}\right) + ib\left(\dfrac{z+\zeta}{2}, \dfrac{z-\zeta}{2i}\right)\right], \\ B(z,\zeta) & = & \dfrac{1}{4}\left[a\left(\dfrac{z+\zeta}{2}, \dfrac{z-\zeta}{2i}\right) - ib\left(\dfrac{z+\zeta}{2}, \dfrac{z-\zeta}{2i}\right)\right], \\ C(z,\zeta) & = & \dfrac{1}{4}c\left(\dfrac{z+\zeta}{2}, \dfrac{z-\zeta}{2i}\right). \end{array}\right. \tag{6}$$

Известно, что любое регулярное решение уравнения (1) с $\mathbf{R}$-аналитическими коэффициентами само является $\mathbf{R}$-аналитическим и что продолжением любой $\mathbf{R}$-аналитической функции на переменные z и ζ (3) является $\mathbf{C}$-аналитическая функция по этим переменным. Поэтому переход к комплексным переменным z, ζ осуществляет переход от изучения регулярных решений дифференциального уравнения (1) в области T к эквивалентной задаче изучения С-аналитических решений $U(z,\zeta)$ операторного уравнения (4) с С-аналитическими в $(T \times \overline{T})$ коэффициентами. Фактически изучение $U(z,\zeta)$ можно проводить в таких цилиндрических областях $(\Omega \times \overline{\Omega})$, в которых все коэффициенты (6) одновременно являются С-аналитическими. *Односвязная* область Ω с таким свойством названа *основной* областью дифференциального уравнения (1) и операторного уравнения (4); она всегда существует и может быть как окрестностью некоторой точки, так и расширенной плоскостью ($\Omega = \overline{\mathbf{C}}$ при целых коэффициентах a, b, c).

При построении представлений С-аналитических решений уравнения (4) рассматриваемая область T (односвязная или многосвязная) погружалась в одну из основных областей Ω; граничные контуры предполагались гладкими и замкнутыми. Вот одна из формул И. Н. Векуа ([1], с. 49), представляющая все решения уравнения (4) в односвязной области T:

$$\begin{gathered} U(z,\zeta) = G(z,\overline{z_0};z,\zeta)\varphi(z) - \int\limits_{z_0}^{z} \varphi(t)H(t,\overline{z_0};z,\zeta)dt + \\ + G(z_0,\zeta;z,\zeta)\varphi^*(\zeta) - \int\limits_{\overline{z_0}}^{\zeta} \varphi^*(\tau)H^*(z_0,\tau;z,\zeta)d\tau, \end{gathered} \tag{7}$$

$$U(z,\zeta) = \Theta[\varphi(z)] + \Theta^*[\varphi^*(\zeta)]. \tag{8}$$

Здесь в развернутой формуле (7) $G(z,\overline{z};z,\zeta)$ – функция Римана уравнения (4); $\varphi(z)$ и $\varphi^*(\zeta)$ – произвольные функции, голоморфные в областях T и $\overline{T}$ соответственно; z_0 – произвольная точка из T; ядра H и H^* – С-аналитические в $(T \times \overline{T})$ функции по каждой из переменных. Каждой паре произвольных голоморфных функций $\varphi(z)$ и $\varphi^*(\zeta)$ формула (7) ставит в соответствие решение $U(z,\zeta)$ уравнения (4) и, обратно, по известному решению $U(z,\zeta)$ функции $\varphi(z)$ и $\varphi^*(\zeta)$ определяются однозначно. В краткой записи (8) каждое из слагаемых $\Omega[\varphi(z)]$ и $\Omega[\varphi^*(\zeta)]$ является в свою очередь решением уравнения (4); они соответствуют такому выбору произвольных функций: $\varphi(z)$ – любая, $\varphi^* \equiv 0$ и $\varphi \equiv 0$, $\varphi^*(\zeta)$ – любая; вид этих двух решений, записанных в виде линейных интегральных операторов, понятен из представления (7).

В [1] доказано, что любое регулярное в T решение $u(x,y)$ уравнения (1) получается так: за φ^* принимается $\overline{\varphi(\overline{\zeta})}$ и в (7) полагается $\zeta = \overline{z}$. При этом слагаемые (8) становятся комплексно сопряженными, и вместо (7) получается формула

$$u(x,y) = \mathrm{Re}U_0(z,\overline{z}), \tag{9}$$

где использовано обозначение

$$U_0(z,\zeta)=\Theta[\varphi(z)]=G(z,\overline{z_0};z,\zeta)\varphi(z)-\int_{z_0}^{z}\varphi(t)H(t,\overline{z_0};z,\zeta)dt. \tag{10}$$

Изучение граничных задач D и A И. Н. Векуа провел в случае областей T с ляпуновскими границами; при этом предположении неизвестную голоморфную функцию $\varphi(z)$ он представлял в виде интеграла типа Коши с неизвестной чисто мнимой плотностью, для определения которой из заданного граничного условия получалось сингулярное интегральное уравнение.

Эти же граничные задачи рассматривались в диссертации З. М. Нута [2], выполненной под моим руководством. Границами областей T (односвязных и многосвязных) служили алгебраические кривые или дуги таких кривых и их осей симметрии. Заданное алгебраическое уравнение $\rho(x,y) = 0$ (ρ – полином) продолжалось на те же комплексные переменные (2), и рассматриваемая граничная задача превращалась на полученной римановой поверхности

$$R_z: \quad P\left(\frac{z+\zeta}{2}, \frac{z-\zeta}{2i}\right) = 0 \tag{11}$$

в эквивалентную граничную задачу в некотором классе функций, аналитических на R_z. Рассматривались преимущественно ортосимметричные поверхности R_z, на которых линией симметрии была линия L, полученная из ∂T : $p(x,y) = 0$ преобразованием (2). Разрез R_z по L делил R_z на две части: S^+ и S^-, симметричные относительно L; закон симметрии представлял собой взаимно однозначное соответствие $S^+ \longleftrightarrow S^-$:

$$(z,\zeta) \longleftrightarrow (\overline{\zeta},\overline{z}); \tag{12}$$

при такой симметрии точки $(\xi,\overline{\xi}) \in L$ переходили в себя. В полученных граничных задачах на R_z приходилось отыскивать решения среди кусочно-голоморфных функций, удовлетворяющих условию симметрии

$$\Phi(z,\zeta) = \overline{\Phi(\overline{\zeta},\overline{z})}. \tag{13}$$

В этой работе мы хотим обратить внимание на следующие обстоятельства.

Если в равенстве (5) произвести формально преобразование (12), то в силу вещественности $u(x,y)$ получим

$$\overline{U(\overline{\zeta},\overline{z})} = U(z,\zeta). \tag{14}$$

Это соотношение имеет вид (13) и мы будем называть его также условием симметрии.

Отметим, что $C(z,\zeta)$ по той же причине вещественности $c(x,y)$ будет удовлетворять условию симметрии (14), а вот коэффициенты $A(z,\zeta)$ и $B(z,\zeta)$ связаны равенством

$$\overline{B(\overline{\zeta},\overline{z})} = A(z,\zeta). \tag{15}$$

Эти свойства коэффициентов уравнения (4) и известные свойства операторов (3) позволяют установить, что если $U_0(z,\zeta)$ есть какое-то **C**-аналитическое в $(T\times\overline{T})$ решение (4), то решением его будет и $\overline{U_0(\overline{\zeta},\overline{z})}$, а также

$$U(z,\zeta) = \frac{1}{2}[U_0(z,\zeta) + \overline{U(\overline{\zeta},\overline{z})}]. \tag{16}$$

Очевидно, что решение (16) удовлетворяет условию симметрии (14), и если в (16) положить $\zeta=\overline{z}$, то получим

$$U(z,\overline{z}) = \mathrm{Re}U_0(z,\zeta) = u(x,y). \tag{17}$$

Значит, имея любое **C**-аналитическое в $(T\times\overline{T})$ решение уравнения (4) $U_0(z,\zeta)$, можно построить соответствующее ему регулярное вещественное решение $u(x,y)$ уравнения (1) следующим образом: по формуле (16) построить решение $U(z,\zeta)$, удовлетворяющее условию симметрии (14), и положить в нем $\zeta=\overline{z}$.

Непосредственными вычислениями легко показать, что при $\varphi^* = \overline{\varphi(\overline{\zeta})}$ формула (7) определяет решение, удовлетворяющее условию симметрии (14). Если же вычислять по $\Theta[\varphi(z)]$ симметричное решение $\Theta^*[\varphi^*]$, то значение $\varphi^* = \overline{\varphi(\overline{\zeta})}$ получится автоматически, в ходе вычислений, что очень удобно при решении граничных задач, например, при решении задачи D.

Краевое условие задачи D запишем в виде

$$U^+(\xi) = F(\xi), \quad \xi\in\partial T\backslash\{\xi_1,\dots,\xi_l\}, \tag{18}$$

где заданная функция $F(\xi)$ непрерывна по Гельдеру. Для определенности будем считать, что ∂T есть замкнутый алгебраический контур рода $\rho \geq 0$, ограничивающий односвязную область. На основании вышесказанного можно считать, что $S^+ = (T \times \overline{T})$, $S^- = (\overline{T} \times T)$ и что L есть линия, состоящая из неподвижных точек симметрии (12).

Так как все регулярные решения $u(x, y)$ уравнения (1) определены формулами (9) и (10), то мы отыскиваем решение задачи D среди этих же функций. Все они содержат произвольную голоморфную в T функцию $\varphi(z)$, которую надо выбрать так, чтобы выполнялось условие (18). После перехода к переменным (2) мы будем строить решение $U(z, \zeta)$ операторного уравнения (4), удовлетворяющее на основании (9) граничному условию

$$\mathrm{Re} U_0(\xi, \overline{\xi}) = F(\xi), \; \xi \in \partial T \backslash \{\xi_1, \ldots, \xi_l\}. \tag{19}$$

При решении вводим вспомогательную кусочно-голоморфную функцию

$$U(z, \zeta) = \{U_0(z, \zeta), \; (z, \zeta) \in S^+; \quad \overline{U_0(\overline{\zeta}, \overline{z})} \; (z, \zeta) \in S^-, \} \tag{20}$$

где $U_0(z, \zeta)$ имеет вид (9). Эта функция удовлетворяет условию симметрии (14), опираясь на которое, из (20) получаем

$$U^+(\xi, \overline{\xi}) + U^-(\xi, \overline{\xi}) = U_0(\xi, \overline{\xi}) + \overline{U_0(\xi, \overline{\xi})} = 2\mathrm{Re} U_0(\xi, \overline{\xi}) = 2F(\xi). \tag{21}$$

Теперь на основании этой цепочки равенств можно выразить $F(\xi)$ через $\varphi(\xi)$, точнее, через $\mathrm{Re}\varphi(\xi)$. Для этого обращаемся к равенствам (20), расписав их на основании (10) в развернутой форме. Будем иметь

$$2F(\xi) = U_0(\xi, \overline{\xi}) + \overline{U_0(\xi, \overline{\xi})} = G(\xi, \overline{z_0}; \xi, \overline{\xi})\varphi(\xi) - \int_{z_0}^{\xi} \varphi(t) H(t, \overline{z}_0; \xi, \overline{\xi}) dt +$$

$$+ G(\xi, \overline{z_0}; \xi, \overline{\xi}) \overline{\varphi(\xi)} - \int_{\overline{z_0}}^{\overline{\xi}} \overline{\varphi(\overline{\tau})} \overline{H(z_0, \tau; \xi, \overline{\xi})} d\tau.$$

Неинтегральные члены в сумме дают $2G \,\mathrm{Re}\varphi(\xi)$, а вот интегралы удалось объединить только в случае, когда область T является *звездной* с центром z_0. Тогда, введя вещественное переменное интегрирования η с помощью равенства $t - z = \eta(z_0 - z)$, интегралы можно объединить и получить интегральное уравнение, связывающее $F(\xi)$ и $f(\xi) = \mathrm{Re}\varphi(\xi)$:

$$\Theta[f(\xi)] = F(\xi). \tag{22}$$

Это уравнение Вольтерра второго рода. Из него $f(\xi)$ определяется однозначно, и задача сводится к задаче Шварца $\mathrm{Re}\varphi(\xi) = f(\xi)$, $\xi \in \partial T$. При $\rho = 0$ эта задача безусловно разрешима и имеет единственное решение; в случае $\rho \neq 0$ задача может оказаться разрешимой лишь при дополнительных условиях на $f(\xi)$.

Имеются достаточно простые частные случаи, когда при известной G оператор Θ удается определить.

ЛИТЕРАТУРА

1. Векуа И.Н. *Новые методы решения эллиптических уравнений.* – М.-Л.: ГИТТЛ, 1948. – 286 с.

2. Нут З.М. *Решение граничных задач для эллиптических уравнений второго порядка методом аналитического продолжения.* – Автореферат канд. дисс. – Казань, 1991.

РОЛЬ Ф.Д.ГАХОВА В СТАНОВЛЕНИИ И РАЗВИТИИ НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ ПО КРАЕВЫМ ЗАДАЧАМ И СИНГУЛЯРНЫМ ИНТЕГРАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

Л. И. Чибрикова

Казанский государственный университет

Для кафедры дифференциальных уравнений Казанского университета 1999 год является юбилейным. Исполнилось 50 лет ее второго открытия в 1949 году. Должность заведующего кафедрой была предоставлена доктору физико-математических наук, профессору Федору Дмитриевичу Гахову.

Ф.Д.Гахов был известен в Казанском университете с молодых лет. Он родился 19 февраля 1906 года в одной из станиц Ставрополья, сейчас это город Черкесск. В 1925 году он окон-